Ueber

die regulären und Poinsot'schen Körper und ihre Inhaltsbestimmung vermittelst Determinanten.

Inaugural-Dissertation

welche bei

Hochlöblicher Philosophischer Facultät zu Marburg

zur

Erlangung der Doctorwürde

einreicht

Otto Löwe

aus Clausthal.

Marburg, 1875.

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von F. W. Kunike in Greifswald.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554412_0221

Die vorliegende Untersuchung hat den Zweck, die Inhalte der fünf regulären und der Poinsot'schen Körper durch Determinanten zu bestimmen. Da sich indessen diese Aufgabe in Beziehung auf das Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder fast allzu einfach gestaltet, so möge die darauf gerichtete Untersuchung gleichsam nur als Einleitung angesehen werden, während die Betrachtung des Dodekaeders, Ikosaeders und der Poinsot'schen Polyeder den hauptsächlichsten Inhalt bildet.

Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, dass bei rechtwinkligem Coordinatensystem das sechsfache Volumen eines beliebigen Tetraeders durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \\ x^{IV}, & y^{IV}, & z^{IV}, & 1 \end{vmatrix}$$

ausgedrückt werden kann, worin die mit den Indices versehenen Grössen, die Coordinaten der vier Eckpunkte des Tetraeders bezeichnen. Diese Determinante reducirt sich jedoch auf eine des dritten Grades,

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}$$

sobald eine Ecke des Tetraeders mit dem Anfangspunkt des Coordinatensystems zusammenfällt.

Bezeichnen wir die halbe Achse mit a, so erhalten wir beim Hexaeder, wenn wir ein rechtwinkeliges Coordinatensystem zu Grunde legen, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des Körpers ist und dessen Achsen senkrecht auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen stehen, die Coordinaten der 8 Eckpunkte

$$\begin{array}{llll} x_1 = a & x_2 = a & x_3 = -a & x_4 = -a \\ y_1 = a & y_2 = -a & y_3 = -a & y_4 = a \\ z_1 = a & z_2 = a & z_3 = a & z_4 = a \\ x_5 = a & x_6 = a & x_7 = -a & x_8 = -a \\ y_5 = a & y_6 = -a & y_7 = -a & y_8 = a \\ z_5 = -a & z_6 = -a & z_7 = -a & z_8 = -a \end{array}$$

wobei $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$ die Gleichungen der Würfelflächen sind.

Der Inhalt des Hexaeders ergiebt sich aus einem Tetraeder, dessen Ebenen durch 3 benachbarte Eckpunkte und den Mittelpunkt gehen, für welchen wir nach Obigem die Determinante

$$6\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & a \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

haben. Wir erhalten $\Delta = \frac{2a^3}{3}$, welches mit 12 multiplicirt $= 8a^3$, den Inhalt des Würfels giebt.

In Beziehung auf das reguläre Tetraeder sehen wir, dass die mit den Indices 2, 4, 5 und 7 versehenen Coordinaten Eckpunkte eines solchen bezeichnen, dessen Inhalt wir aus der Determinante

$$6\Delta = a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4a^3$$

finden können. Der ganze Inhalt des angenommenen Tetraeders ist demnach $4 \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{8a^3}{3}$.

Für das Oktaeder, dessen Ecken die Mitten der Flächen vom obigen Würfel sind, erhalten wir alsdann die Coordinaten

$$\begin{array}{llllll} x_1 = a & x_2 = 0 & x_3 = 0 & x_4 = -a & x_5 = 0 & x_6 = 0 \\ y_1 = 0 & y_2 = a & y_3 = 0 & y_4 = 0 & y_5 = -a & y_6 = 0 \\ z_1 \quad 0 & z_2 = 0 & z_3 = a & z_4 = 0 & z_5 = 0 & z_6 = -a \end{array}$$

Der Inhalt ergiebt sich gleich dem achtfachen Inhalt des Tetraeders, welcher durch die Determinante

$$6\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$$

bestimmt ist, woraus für den Inhalt des Oktaeders $= \frac{4a^3}{3}$ folgt.

Gehen wir nun zur Entstehung des Ikosaeders aus dem Oktaeder über, so ist bekannt, dass sich die 12 Eckpunkte desselben durch eine nach stetiger Proportion vorgenommene Teilung der Oktaederkanten erhalten lassen. Wir wollen hier diese Entstehung durch eine zweimalige Abstumpfung der Ecken des Oktaeders bewirken. Die Gleichungen der 8 Oktaederflächen sind

$$\begin{aligned} x+y+z-a &= 0 & \qquad x+y-z-a &= 0 \\ x-y+z-a &= 0 & \qquad x-y-z-a &= 0 \\ -x-y+z-a &= 0 & \qquad -x-y-z-a &= 0 \\ -x+y+z-a &= 0 & \qquad -x+y-z-a &= 0 \end{aligned}$$

Legen wir senkrecht zu den Achsen, in der Entfernung am $(m < 1)$ vom Mittelpunkt des Coordinatensystems, Ebenen, so werden die Ecken des Oktaeders durch quadratische Flächen abgestumpft. Bezeichnen wir die Ecken des nun entstandenen Körpers mit $Q_1\,Q_2\,Q_3$ u. s. w., so berechnen sich aus Fig. 1. die Coordinaten

für	Q_1:	$x = 0$	für	Q_2:	$x = -a(1-m)$
		$y = a(1-m)$			$y = 0$
		$z = am$			$z = am$
„	Q_3:	$x = 0$	„	Q_4:	$x = a(1-m)$
		$y = -a(1-m)$			$y = 0$
		$z = am$			$z = am$
„	Q_5:	$x = am$	„	Q_6:	$x = am$
		$y = 0$			$y = a(1-m)$
		$z = a(1-m)$			$z = 0$
„	Q_7:	$x = am$	„	Q_8:	$x = am$
		$y = 0$			$y = -a(1-m)$
		$z = -a(1-m)$			$z = 0$

für Q_9: $x = a(1-m)$ für Q_{10}: $x = 0$

$y = am$ $y = am$

$z = 0$ $z = a(1-m)$

u. s. w.

Die 6 Punkte $Q_1 Q_4 Q_5 Q_6 Q_9 Q_{10}$ bilden ein Sechseck mit abwechselnd gleichen Seiten. Sämmtliche Ecken dieses Körpers liegen auf einer Kugel mit dem Radius

$$r = a\sqrt{m^2+(1-m)^2}.$$

Jetzt stumpfen wir ferner die Ecken Q_2, Q_4, Q_6, Q_8 u. s. w. derart ab, dass von jeder quadratischen Fläche nur eine Diagonale als Kante übrig bleibt. Der Körper hat alsdann nur noch 12 Ecken und wird, wie Fig. 1. zeigt, von 20 Dreiecksflächen begrenzt, von denen 8 (Oktaederflächen) gleichseitige, die 12 übrigen (die Abstumpfungsflächen) gleichschenklige Dreiecke bilden, und es leuchtet sofort ein, dass, wenn jene gleichschenkligen Dreiecke ebenfalls gleichseitige werden, unser Körper in das reguläre Ikosaeder übergeht.

Um diese Bedingung zu erfüllen, betrachten wir die Fläche $Q_1 Q_3 Q_5$, deren Gleichung wir aus folgender Determinante erhalten

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & a(1-m) & am & 1 \\ 0 & -a(1-m) & am & 1 \\ am & 0 & a(1-m) & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a(1-m) & am & 1 \\ -a(1-m) & am & 1 \\ 0 & a(1-m) & 1 \end{vmatrix}$$

$$- y \begin{vmatrix} 0 & am & 1 \\ 0 & am & 1 \\ am & a(1-m) & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 0 & a(1-m) & 1 \\ 0 & -a(1-m) & 1 \\ am & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & a(1-m) & am \\ 0 & -a(1-m) & am \\ am & 0 & a(1-m) \end{vmatrix}$$

d. h. $(2m-1)x + mz - am^2 = 0.$

Ganz analog ergeben sich als Gleichungen der übrigen gleichschenkligen Dreiecksflächen

$$-(2m-1)x + mz - am^2 = 0$$
$$mx + (2m-1)y - am^2 = 0$$
$$mx - (2m-1)y - am^2 = 0$$
$$my + (2m-1)z - am^2 = 0$$
$$my - (2m-1)z - am^2 = 0$$

und die anderen sechs durch Umkehrung der Vorzeichen der Glieder mx, my und mz.

Die Grösse m ist jedoch in diesen Gleichungen noch unbestimmt. Sie liegt, wie schon oben gesagt, zwischen $m = 0$ und $m = \pm 1$ und bestimmt sich, für den Fall des Ikosaeders, aus einer Relation, die man für $Q_1 Q_3 = Q_1 Q_5$ erhält, nämlich aus der Bedingungsgleichung

$$4a^2(1-m)^2 = a^2m^2 + a^2(1-m)^2 + a^2(1-2m)^2 \quad \text{d. i.}$$

$$m^2 + m - 1 = 0 \quad \text{woraus}$$

$$m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61803 = 2\sin 18^0$$

welche Zahl bekanntlich den grösseren Abschnitt einer in stetige Proportion geteilten Linie misst. Dieser Wert in obige Gleichungen und Coordinaten eingesetzt, giebt als Gleichungen der eben betrachteten Begrenzungsflächen

$$\begin{aligned}
2(\sqrt{5}-2)x + (\sqrt{5}-1)z - a(3-\sqrt{5}) &= 0\\
-(\sqrt{5}-2)x + (\sqrt{5}-1)z - a(3-\sqrt{5}) &= 0\\
(\sqrt{5}-1)x + 2(\sqrt{5}-2)y - a(3-\sqrt{5}) &= 0\\
(\sqrt{5}-1)x - 2(\sqrt{5}-2)y - a(3-\sqrt{5}) &= 0\\
(\sqrt{5}-1)y + 2(\sqrt{5}-2)z - a(3-\sqrt{5}) &= 0\\
(\sqrt{5}-1)y - 2(\sqrt{5}-2)z - a(3-\sqrt{5}) &= 0
\end{aligned}$$

oder

$$\frac{x}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} + \frac{z}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} - 1 = 0$$

$$-\frac{x}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} + \frac{z}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} - 1 = 0$$

$$\frac{x}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} + \frac{y}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} - 1 = 0$$

$$\frac{x}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} - \frac{y}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} - 1 = 0$$

$$\frac{y}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} + \frac{z}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} - 1 = 0$$

$$\frac{y}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} + \frac{z}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} - 1 = 0$$

worin $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1+m$ ist.

Der senkrechte Abstand dieser 12 Dreiecke wird jetzt gleich dem senkrechten Abstand der 8 Oktaederflächen vom Mittelpunkt $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$, da

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(1+m)^2}}} = a\sqrt{\tfrac{1}{3}} \text{ ist.}$$

Die Coordinaten der 12 Eckpunkte des Ikosaeders sind alsdann, wenn dieselben (s. Fig. 2.) durch $P_1 P_2 P_3 \ldots P_{12}$ bezeichnet werden, wobei die Punkte $P_1 P_2 P_3 \ldots P_{12}$ resp. $Q_3 Q_1 Q_5 \ldots Q_{21}$ entsprechen, folgende

für P_1: $x = 0$, $y = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $z = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

für P_2: $x = 0$, $y = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $z = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

„ P_3: $x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $y = 0$, $z = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

„ P_4: $x = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $y = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $z = 0$

„ P_5: $x = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $y = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $z = 0$

„ P_6: $x = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $y = 0$, $z = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

„ P_7: $x = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $y = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $z = 0$

„ P_8: $x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $y = 0$, $z = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

„ P_9: $x = 0$, $y = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $z = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

„ P_{10}: $x = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $y = 0$, $z = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$P_{11}\quad x = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \qquad P_{12}\quad x = 0$$
$$y = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \qquad y = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$z = 0 \qquad z = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Mit Hülfe dieser Coordinaten ergiebt sich der Inhalt eines Tetraeders, welches durch drei, einer Seitenfläche angehörige Eckpunkte und den Mittelpunkt gebildet wird, durch die Determinante

$$6\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a(1-m) & am \\ 0 & -a(1-m) & am \\ am & 0 & a(1-m) \end{vmatrix} = 2a^3m^2(1-m)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) & a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\ 0 & -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) & a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\ a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) & 0 & a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \end{vmatrix} = a^3(7-3\sqrt{5})$$

$\Delta = \frac{a^3}{6}(7-3\sqrt{5})$; demnach wird der Inhalt des Ikosaeders

$$= \frac{10a^3}{3}(7-3\sqrt{5}).$$

Bezeichnen wir mit φ den Winkel, welchen eine der Coordinatenachsen, mit der nach der benachbarten Ecke gezogenen Geraden bildet, so dass

$$r\cos\varphi = am, \qquad r\sin\varphi = a(1-m)$$
$$\sin\varphi = \frac{\frac{1}{2}\,\text{Kante}}{r} = \frac{y}{r} = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2r}$$
$$\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2r} \quad \text{u. s. w.}$$

wird, so erhalten wir für die Eckpunkte $P_1P_2P_3\ldots P_{12}$ des Ikosaeders die Coordinaten

für P_1: $x = 0$ für P_2: $x = 0$
$y = -r\sin\varphi$ $y = r\sin\varphi$
$z = r\cos\varphi$ $z = r\cos\varphi$

für P_3:	$x = r\cos\varphi$	für P_4:	$x = r\sin\varphi$
	$y = 0$		$y = -r\cos\varphi$
	$z = r\sin\varphi$		$z = 0$
„ P_5:	$x = -r\sin\varphi$	„ P_6:	$x = -r\cos\varphi$
	$y = -r\cos\varphi$		$y = 0$
	$z = 0$		$z = r\sin\varphi$
„ P_7:	$x = r\sin\varphi$	„ P_8:	$x = r\cos\varphi$
	$y = r\cos\varphi$		$y = 0$
	$z = 0$		$z = -r\sin\varphi$
„ P_9:	$x = 0$	„ P_{10}:	$x = -r\cos\varphi$
	$y = -r\sin\varphi$		$y = 0$
	$z = -r\cos\varphi$		$z = -r\sin\varphi$
„ P_{11}:	$x = -r\sin\varphi$	„ P_{12}:	$x = 0$
	$y = r\cos\varphi$		$y = r\sin\varphi$
	$z = 0$		$z = -r\cos\varphi$

Den Inhalt des Tetraeders, welches von den Eckpunkten $P_1 P_2 P_3$ und dem Mittelpunkt des Körpers gebildet wird, finden wir aus der Determinante

$$6\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -r\sin\varphi & r\cos\varphi \\ 0 & r\sin\varphi & r\cos\varphi \\ r\cos\varphi & 0 & r\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^3(\sin 2\varphi \,.\, \cos\varphi)$$

Hieraus der Inhalt des Ikosaeders

$$= \frac{10}{3} r^3(\sin 2\varphi \,.\, \cos\varphi)$$

Der Radius r lässt sich leicht durch a ausdrücken, da stets $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist. Wir erhalten, wie schon oben erwähnt, $r = a\sqrt{1 - 2m + m^2} = a\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

Die Gruppirung der Flächen des Ikosaeders in ihrer Anordnung zu fünf wird anschaulicher, wenn wir zu einer Coordinatenachse, z. B. der z Achse eine Eckenachse wählen, das Coordinatensystem also um die x Achse in der yz Ebene um den eben besprochenen Winkel φ drehen. (s. Fig. 3.)

Alsdann geht die z Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Körpers, die in der Projection auf der xy Ebene als

Mittelpunkt eines gleichseitigen Zehnecks auftreten. Die neuen Coordinaten der Punkte $P_1 P_2 P_3$ u. s. w. erhalten wir durch Substitution der alten Coordinaten in die Gleichungen

$$\begin{aligned} X' &= x \\ Y' &= y\cos\varphi + z\sin\varphi \\ Z' &= -y\sin\varphi + z\cos\varphi \end{aligned}$$

Dieses giebt

für P_1: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = r$

für P_2: $x_1 = 0$, $y_1 = r\sin 2\varphi$, $z_1 = r\cos 2\varphi$

„ P_3: $x_1 = r\cos\varphi$, $y_1 = r\sin\varphi^2$, $z_1 = r\dfrac{\sin 2\varphi}{2} = r\cos 2\varphi$

„ P_4: $x_1 = r\sin\varphi$, $y_1 = -r\cos\varphi^2$, $z_1 = r\dfrac{\sin 2\varphi}{2} = r\cos 2\varphi$

„ P_5: $x_1 = -r\sin\varphi$, $y_1 = -r\cos\varphi^2$, $z_1 = r\dfrac{\sin 2\varphi}{2} = r\cos 2\varphi$

„ P_6: $x_1 = -r\cos\varphi$, $y_1 = r\sin\varphi^2$, $z_1 = r\cos 2\varphi$

„ P_7: $x_1 = r\sin\varphi$, $y_1 = r\cos\varphi^2$, $z_1 = -r\dfrac{\sin 2\varphi}{2} = -r\cos 2\varphi$

„ P_8: $x_1 = r\cos\varphi$, $y_1 = -r\sin\varphi^2$, $z_1 = -r\cos 2\varphi$

„ P_9: $x_1 = 0$, $y_1 = -r\sin 2\varphi$, $z_1 = -r\cos 2\varphi$

„ P_{10}: $x_1 = -r\cos\varphi$, $y_1 = -r\sin\varphi^2$, $z_1 = -r\cos 2\varphi$

„ P_{11}: $x_1 = -r\sin\varphi$, $y_1 = r\cos\varphi^2$, $z_1 = -r\cos 2\varphi$

„ P_{12}: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = -r$

Hiernach ist es nun leicht, die Gleichungen der verschiedenen Ikosaederflächen aufzustellen. Ordnen wir dieselben zu 5 zusammen, so erhalten wir zuerst 5 Flächen, die sich um den Punkt P_1 lagern. Es resultirt für die Gl. der Fl. $P_1 P_2 P_3$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2 \sin\varphi . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2\cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ \sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2y\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & \cos 2\varphi & 1\\ \cos\varphi & \cos 2\varphi & 1\end{vmatrix}+r^2\sin\varphi z\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2\cos\varphi & 1\\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1\end{vmatrix}$$

$$-r^3\sin\varphi\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2\cos\varphi & \cos 2\varphi\\ \cos\varphi & \sin\varphi & \cos 2\varphi\end{vmatrix}$$

d. h. $\sin\varphi^2(2\cos\varphi-\sin\varphi)x+\frac{\sin 2\varphi}{2}y+\cos\varphi^2 z-r\cos\varphi^2=0.$

Um jedoch sofort die Abschnitte erkennen zu können, welche die bis zum Durchschnitt mit den Achsen verlängerten Flächen auf denselben hervorbringen, ist es ratsam diese Gleichungen auf die Form

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}-1=0$$

zu bringen. Wir erhalten alsdann für die Fläche $P_1P_2P_3$ die Gleichung

$$\frac{x}{r\cos\varphi^2}+\frac{y}{r\cot g\varphi}+\frac{z}{r}-1=0$$
$$\sin\varphi^2(2\cos\varphi-\sin\varphi)$$

Aus der Bedingungsgleichung

$$m^2+m-1=0,$$

sowie aus dem System überhaupt, können wir uns jedoch verschiedene Relationen herleiten, die zur Vereinfachung unserer Coefficienten bedeutend beitragen. Es ist

$$r\cos\varphi=am,\qquad r\sin\varphi=a(1-m)$$

$$\sin\varphi=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}},\qquad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\qquad \operatorname{tang}\varphi=\frac{1-m}{m}=m$$

$$\sin 2\varphi=\frac{2m}{1+m^2}=\frac{2(1-m^2)}{1+m^2}$$

$$\cos 2\varphi=\frac{1-m^2}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

$$2\cos\varphi-\sin\varphi=\frac{1}{\cos\varphi},\qquad \cos\varphi-\sin\varphi=\sin\varphi\,.\,\operatorname{tg}\varphi$$

$$\sin\varphi^3+\cos\varphi^3=2\sin\varphi\cos\varphi^2$$
$$\cos\varphi^3-\sin\varphi^3=2\sin\varphi^2\cos\varphi$$

u. s. w.

Nach Anwendung dieser Formen finden wir endlich für die Fläche $P_1 P_2 P_3$ die Gleichung

$$\frac{x}{r\cos\varphi \,.\, \operatorname{cotg}\varphi^2} + \frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

Für die Fläche $P_1 P_3 P_4$ erhalten wir

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2 x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi & 1 \\ -\cos\varphi^2 & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$- r^2 y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ \sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2 z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- r^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & \cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{x}{\frac{r(\sin\varphi^3 + \cos\varphi^3)}{2\sin\varphi^2}} + \frac{y}{\frac{r(\sin\varphi^3 + \cos\varphi^3)}{2\sin\varphi^2(\sin\varphi - \cos\varphi)}} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

Der Coefficient von x ist hier gleich der Halbachse $a = r\cos\varphi \,.\, \operatorname{cotg}\varphi$. Die Gleichung gehörig reducirt liefert

$$\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi} - \frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^3} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

Für die Fläche $P_1 P_4 P_5$ ist

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & r \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi \\ -r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi \end{vmatrix} = -r^2 \sin\varphi \,.\, y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \cos 2\varphi & 1 \\ -1 & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ r^2 \sin\varphi\cos\varphi^2 z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - r^3 \sin\varphi\cos\varphi^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \cos 2\varphi \\ -1 & -1 & \cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$- \frac{y}{\frac{r}{2}\operatorname{cotg}\varphi^2} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

$P_1 P_5 P_6$ liefert die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ -r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ -r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2 x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\cos\varphi^2 & \cos 2\varphi & 1 \\ \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2 y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ -\cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2 z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \\ -\cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi^2 & \cos 2\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{x}{\frac{r(\sin\varphi^3+\cos\varphi^3)}{2\sin\varphi^2}} + \frac{y}{\frac{r(\sin\varphi^3+\cos\varphi^3)}{2\sin\varphi^2(\sin\varphi-\cos\varphi)}} + \frac{z}{r} - 1$$

$$= -\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi} - \frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^2} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

$P_1 P_6 P_2$ liefert

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ -r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ 2\cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\cos\varphi . y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \cos 2\varphi & 1 \\ 0 & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} . z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & \sin\varphi & 1 \\ 0 & 2\cos\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3 \frac{\sin 2\varphi}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & \sin\varphi & \cos 2\varphi \\ 0 & 2\cos\varphi & \cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{x}{\frac{r\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2(2\cos\varphi-\sin\varphi)}} + \frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi} + \frac{z}{r} - 1$$

$$= -\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi^2} + \frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

Die nächsten Flächen, deren Gleichungen bestimmt werden müssen, sind diejenigen, welche sich mit ihren Seiten an die soeben bestimmten anlehnen. Wir erhalten für die Fläche $P_2 P_3 P_7$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos 2\varphi . x \begin{vmatrix} \sin 2\varphi & 1 & 1 \\ \sin\varphi^2 & 1 & 1 \\ \cos\varphi^2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\cos 2\varphi . y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi & 1 & 1 \\ \sin\varphi & -1 & 1 \end{vmatrix} + r^2 z \begin{vmatrix} 0 & \sin 2\varphi & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\cos 2\varphi \begin{vmatrix} 0 & \sin 2\varphi & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & -1 \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{x}{r\cos\varphi\,\operatorname{cotg}\varphi} + \frac{y}{r} + \frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3} - 1 = 0$$

$P_3 P_4 P_8$ giebt

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\cos\varphi & -r\sin\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos 2\varphi . x \begin{vmatrix} \sin\varphi^2 & 1 & 1 \\ -\cos\varphi^2 & 1 & 1 \\ -\sin\varphi^2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\cos 2\varphi . y \begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 & 1 \\ \sin\varphi & 1 & 1 \\ \cos\varphi & -1 & 1 \end{vmatrix} + r^2 z \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \\ \cos\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\cos 2\varphi \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi^2 & -1 \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{x}{r\cos\varphi} - \frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^2} + \frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3} - 1 = 0$$

$P_4 P_5 P_9$ liefert

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ -r\sin\varphi^2 & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & -r\sin 2\varphi & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = -r^2\sin\varphi\cos 2\varphi . y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi & 1 \\ -1 & \cos\varphi & 1 \\ 0 & 2\sin\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^3\frac{\sin 2\varphi}{2}\cos 2\varphi \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi & 1 \\ -1 & \cos\varphi & 1 \\ 0 & 2\sin\varphi & -1 \end{vmatrix}$$

also

$$-\frac{y}{r\cos\varphi}+\frac{z}{\dfrac{r\cos 2\varphi}{(2\sin\varphi-\cos\varphi)\sin\varphi}}-1$$

$$=-\frac{y}{\frac{r}{2}\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

da für unsere Bedingungen

$$2\sin\varphi+\cos\varphi=\frac{1}{\sin\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\cos\varphi}{2\sin\varphi-\cos\varphi}=\operatorname{cotg}\varphi^3 \quad \text{ist.}$$

Die Fläche $P_5P_6P_{10}$ liegt in Beziehung zur yz Ebene symmetrisch zu $P_3P_4P_8$. Wir erhalten die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ -r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ -r\cos\varphi & -r\sin\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos 2\varphi\,.\,x \begin{vmatrix} -\cos\varphi^2 & 1 & 1 \\ \sin\varphi^2 & 1 & 1 \\ -\sin\varphi^2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+r^2\cos 2\varphi\,.\,y \begin{vmatrix} \sin\varphi & 1 & 1 \\ \cos\varphi & 1 & 1 \\ \cos\varphi & -1 & 1 \end{vmatrix} - r^2 z \begin{vmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+r^3\cos 2\varphi \begin{vmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi^2 & -1 \end{vmatrix}$$

also

$$-\frac{x}{r\cos\varphi}-\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^2}+\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

$P_6P_2P_{11}$, welche in Beziehung zur yz Ebene symmetrisch zu $P_2P_3P_7$ liegt, giebt die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos 2\varphi\,.\,x \begin{vmatrix} \sin\varphi^2 & 1 & 1 \\ \sin 2\varphi & 1 & 1 \\ \cos\varphi^2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+r^2\cos 2\varphi\,.\,y\begin{vmatrix}\cos\varphi & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ \sin\varphi & -1 & 1\end{vmatrix}-r^2 z\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1\\ 0 & \sin 2\varphi & 1\\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$+r^3\cos 2\varphi\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1\\ 0 & \sin 2\varphi & 1\\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & -1\end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{y}{r}+\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

Da jede der übrigen Ikosaederflächen einer der soeben Abgeleiteten parallel ist, so ist es sehr einfach, ohne weitere Rechnungen die Gleichungen dieser Flächen aufzustellen. Wir erhalten durch Umkehrung der Vorzeichen für die Glieder mit x, y, z

$$P_6\ P_{10}\ P_{12}=-\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi^2}-\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$P_{10}\,P_{11}\,P_{12}=-\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$P_7\ P_{11}\,P_{12}=\frac{y}{\frac{r}{2}\operatorname{cotg}\varphi^2}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$P_7\ P_8\ P_{12}=\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$P_6\ P_8\ P_{12}=\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi^2}-\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$P_5\ P_9\ P_{10}=-\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{y}{r}-\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

$$P_6\ P_{10}\,P_{11}=-\frac{x}{r\cos\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^2}-\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

$$P_2\ P_7\ P_{11}=\frac{y}{\frac{r}{2}\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

$$P_3\ P_7\ P_8=\frac{x}{r\cos\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^2}-\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

$$P_4\ P_8\ P_9=\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{y}{r}-\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

Aus dem regulären Ikosaeder können jedoch noch zwei neue, sternförmige Körper abgeleitet werden, die nach ihrem Entdecker Poinsot, die Poinsot'schen Körper genannt werden. Denken wir uns am Ikosaeder durch je 5 Ecken, welche einer Ecke anliegen und für sich ein reguläres Fünfeck bilden, Ebenen gelegt, so erhalten wir den ersten Poinsot'schen Körper, dessen Ecken die des Ikosaeders sind und dessen 12 Flächengleichungen leicht aus folgenden Determinanten hergeleitet werden können.

Für die Fläche $P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ erhalten wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2 z \begin{vmatrix} 0 & \sin 2\varphi & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\cos 2\varphi \begin{vmatrix} 0 & \sin 2\varphi & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{z}{r\cos 2\varphi} - 1 = 0$$

da wir nur die Coordinaten von 3 Punkten aufzustellen brauchen, um die Ebene zu bestimmen.

Für die Gleichung der Fläche $P_1 P_2 P_7 P_8 P_4$ haben wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi . x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ \cos\varphi & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\sin\varphi . y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cos 2\varphi & 1 \\ 1 & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} . z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\sin\varphi & 1 \\ 1 & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3 \frac{\sin 2\varphi}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\sin\varphi & \cos 2\varphi \\ 1 & \cos\varphi & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{x}{r\sin\varphi} + \frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

$P_1 P_3 P_8 P_9 P_5$ liefert

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\cos\varphi & -r\sin\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi^2 . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \cos 2\varphi & 1 \\ -1 & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\cos\varphi . y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \cos 2\varphi & 1 \\ 1 & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2\sin\varphi^2\cos\varphi . z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\sin\varphi^2\cos\varphi \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cos 2\varphi \\ 1 & -1 & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{x}{r\cos\varphi} - \frac{y}{r\,\mathrm{tang}\,\varphi} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

Die Gleichung der Fläche $P_1 P_4 P_9 P_{10} P_6$ erhalten wir

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & -r\sin 2\varphi & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = -r^2\cos\varphi . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ 2\sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\sin\varphi . y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \cos 2\varphi & 1 \\ 0 & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} - r^2\frac{\sin 2\varphi}{2} . z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \cos\varphi & 1 \\ 0 & 2\sin\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$+r^3\frac{\sin 2\varphi}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \cos\varphi & \cos 2\varphi \\ 0 & 2\sin\varphi & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{x}{r\cos\varphi} - \frac{y}{r\,\mathrm{tang}\,\varphi} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

da sie zur vorhergehenden Fläche symmetrisch liegt.

Die Fläche $P_1 P_5 P_{10} P_{11} P_2$ liegt symmetrisch zu $P_1 P_2 P_7 P_8 P_4$. Ihre Determinante ist

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ -r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ 2\sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$+r^2\sin\varphi\,.\,y\begin{vmatrix}0&1&1\\1&\cos 2\varphi&1\\0&\cos 2\varphi&1\end{vmatrix}+r^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\,.\,z\begin{vmatrix}0&1&1\\-1&-\cos\varphi&1\\0&2\sin\varphi&1\end{vmatrix}$$

$$-r^3\frac{\sin 2\varphi}{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\-1&-\cos\varphi&\cos 2\varphi\\0&2\sin\varphi&\cos 2\varphi\end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{x}{r\sin\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{z}{r}-1=0$$

$P_1P_6P_{11}P_7P_3$ liefert die Determinante

$$\begin{vmatrix}x&y&z&1\\0&0&r&1\\-r\cos\varphi&r\sin\varphi^2&r\cos 2\varphi&1\\-r\sin\varphi&r\cos\varphi^2&-r\cos 2\varphi&1\end{vmatrix}=r^2x\begin{vmatrix}0&1&1\\\sin\varphi^2&\cos 2\varphi&1\\\cos\varphi^2&-\cos 2\varphi&1\end{vmatrix}$$

$$+r^2y\begin{vmatrix}0&1&1\\\cos\varphi&\cos 2\varphi&1\\\sin\varphi&-\cos 2\varphi&1\end{vmatrix}-r^2z\begin{vmatrix}0&0&1\\\cos\varphi&\sin\varphi^2&1\\\sin\varphi&\cos\varphi^2&1\end{vmatrix}$$

$$+r^3\begin{vmatrix}0&0&1\\\cos\varphi&\sin\varphi^2&\cos 2\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi^2&-\cos 2\varphi\end{vmatrix}$$

d. h.

$$=\frac{y}{\frac{r}{2}}+\frac{z}{r}-1=0$$

Die Gleichungen der 6 anderen Ebenen ergeben sich gleichfalls aus diesen, durch Multiplication der x, y und z mit -1, da diese wieder einzeln denselben parallel laufen.

Wir erhalten alsdann als Gleichungen

$$\frac{z}{r\cos 2\varphi}+1=0$$

$$-\frac{x}{r\sin\varphi}-\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$-\frac{x}{r\cos\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{tang}\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$+\frac{x}{r\cos\varphi}+\frac{y}{r\,\mathrm{tang}\,\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$+\frac{x}{r\sin\varphi}-\frac{y}{r\,\mathrm{cotg}\,\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$-\frac{y}{r}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$\overline{2}$$

Der Inhalt eines solchen Körpers besteht aus 12 congruenten Pyramiden und kann derselbe ebenfalls durch Determinanten bestimmt werden, wenn man dieselben durch 2 Ebenen jedesmal in 3 Tetraeder zerlegt, wovon immer 2 ebenfalls congruent sind. Einfacher resultirt jedoch noch der Inhalt aus den Coordinaten des Mittelpunkts vom Körper, des Mittelpunkts der 5seitigen Grundfläche und zweier aneinander liegenden Eckpunkte. Die Pyramide wird dadurch in 5 gleiche Tetraeder zerlegt und das mit 12 multiplicirte Resultat liefert den Inhalt dieses Körpers. Bezeichnen wir denselben im Folgenden kurz mit „Poinsot I." und stellen für seinen Inhalt die Determinante aus den eben erwähnten Coordinaten auf, so erhalten wir

$$6\Delta = r^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos 2\varphi \\ 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi \end{vmatrix} = r^3 \cos 2\varphi \sin 2\varphi \cos\varphi$$

d. i. Poinsot I. $= 10 r^3 \cos 2\varphi \sin 2\varphi \cos\varphi$.

Vergleichen wir hiermit den Inhalt des Ikosaeders, für welchen wir früher

$$\text{Ikos.} = \frac{10}{r}\, r^3 \sin 2\varphi \cos\varphi$$

fanden, so erhalten wir die Proportion

$$\text{Ikos.}: \text{Poinsot I.} = 1 : 3\cos 2\varphi.$$

Den zweiten Poinsot'schen Körper (Poinsot II.) erhalten wir, wenn wir jedesmal durch 3 Eckpunkte eine Ebene so legen, dass sie einer Ikosaederfläche parallel läuft. Der neu entstandene Körper besitzt alsdann 20 Flächen, während die Anzahl der Ecken dieselbe geblieben ist.

Betrachten wir hier die Fläche $P_1 P_7 P_9$, so gehört diese dem Poinsot II. an, und kann die Richtigkeit ihrer Gleichung leicht aus der Bedingungsgleichung für zwei parallele Ebenen nachgewiesen werden.

(Sollen z. B. zwei Ebenen, deren Gleichungen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

sind, parallel sein, so sind

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{A_2}{C_2}, \quad \frac{B_1}{C_1} = \frac{B_2}{C_2}$$

Bedingungen ihrer Parallelität.)

Bilden wir hier diese Gleichungen durch Determinanten, so ergiebt sich für die Fläche $P_1 P_7 P_9$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & -r\sin 2\varphi & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi \,.\, x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi & -\cos 2\varphi & 1 \\ -2\sin\varphi & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$- r^2\sin\varphi \,.\, y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \cos\varphi & 1 \\ 0 & -2\sin\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$- r^3 \frac{\sin 2\varphi}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \cos\varphi & -\cos 2\varphi \\ 0 & -2\sin\varphi & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

also

$$\frac{x}{r\sin\varphi\,\mathrm{tang}\,\varphi^2} - \frac{y}{r\,\mathrm{tang}\,\varphi} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung kann dadurch leicht erwiesen werden, dass, da sie mit der Fläche $P_3 P_4 P_8$ parallel läuft, nach obigen Bedingungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{cotg}\,\varphi^3}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi\,\mathrm{tang}\,\varphi^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{cotg}\,\varphi = \frac{1}{\mathrm{tang}\,\varphi}$$

sein muss, was auch der Fall ist.

Die Gleichung der Ebene $P_1 P_7 P_{10}$ giebt die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \\ -r\cos\varphi & -r\sin\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2 x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi^2 & -\cos 2\varphi & 1 \\ -\sin\varphi^2 & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2y\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos 2\varphi & 1 \\ -\cos\varphi & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2z\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & 1 \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & -\cos 2\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi^2 & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

folglich

$$\frac{x}{r\sin\varphi\,\mathrm{tang}\,\varphi}+\frac{y}{r\,\mathrm{tang}\,\varphi^3}+\frac{z}{r}-1=0$$

deren Richtigkeit gleichfalls sofort nachzuweisen ist, da diese Fläche der Fläche $P_2P_6P_{11}$ parallel ist.

Den Inhalt dieses Körpers finden wir durch Addition der 20 Tetraeder, welche, wie schon erwähnt, von dem Mittelpunkt des Körpers und diesen mit den Seitenflächen des Ikosaeders parallelen Flächen gebildet werden. Es ergiebt sich für diese die Determinante

$$6\Delta = -r^3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & -\cos 2\varphi \\ 0 & -\sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^3\sin\varphi\sin 2\varphi$$

Folglich: Poinsot II. $= \frac{10}{r}r^3\sin\varphi\sin 2\varphi$.

Stellen wir nun den Inhalt des Ikosaeders mit demjenigen des Poinsot I. und Poinsot II. zusammen, so erhalten wir folgende Proportionen:

Ikosaed.: Poinsot II. $= 1:\mathrm{tang}\,\varphi = 1:m$
Poinsot I.: Poinsot II. $= 3\cos\varphi^2:1$
Ikosaed.: Poinsot I.: Poinsot II. $= 1:3\cos 2\varphi:\mathrm{tg}\,\varphi$.

Gehen wir jetzt zum Pentagonal-Dodekaeder (Fig. 4.) über, so ist klar, dass dasselbe durch 12 Ebenen gebildet wird, welche durch die Ecken des Ikosaeders senkrecht zum Radius der umschriebenen Kugel gelegt werden. Die allgemeine Form der Gleichung einer Berührungsebene, welche in einem Punkte $x_1y_1z_1$ an die Kugel gelegt wird, ist

$$xx_1+yy_1+zz_1-r^2=0$$

Hiernach ist es sehr einfach mit Hülfe unserer früheren Coordinaten die Gleichungen der 12 Ebenen des Dodekaeders aufzustellen. Bezeichnen wir die den Ecken P_1, P_2 etc. des Ikosaeders entsprechenden Ebenen mit den römischen Ziffern I., II., ..., so erhalten wir als Gleichung der Ebene

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && z - r = 0\\
&\text{II.} && y\sin 2\varphi + z\cos 2\varphi - r = 0\\
&\text{III.} && x\cos\varphi + y\sin\varphi^2 + z\cos 2\varphi - r = 0\\
&\text{IV.} && x\sin\varphi - y\cos\varphi^2 + z\cos 2\varphi - r = 0\\
&\text{V.} && -x\sin\varphi - y\cos\varphi^2 + z\cos 2\varphi - r = 0\\
&\text{VI.} && -x\cos\varphi + y\sin\varphi^2 + z\cos 2\varphi - r = 0\\
&\text{VII.} && x\sin\varphi + y\cos\varphi^2 - z\cos 2\varphi - r = 0\\
&\text{VIII.} && x\cos\varphi - y\sin\varphi^2 - z\cos 2\varphi - r = 0\\
&\text{IX.} && -y\sin 2\varphi - z\cos 2\varphi - r = 0\\
&\text{X.} && -x\cos\varphi - y\sin\varphi^2 - z\cos 2\varphi - r = 0\\
&\text{XI.} && -x\sin\varphi + y\cos\varphi^2 - z\cos 2\varphi - r = 0\\
&\text{XII.} && z + r = 0
\end{aligned}$$

Wir sehen aus diesen Gleichungen, dass die Ebenen II.—VI. ein Stück $\frac{r}{\cos 2\varphi}$ in der positiven Richtung auf der z Achse abschneiden, während von den Ebenen VII.—XI. ein gleiches Stück in negativer Richtung abgeschnitten wird. Dieser Punkt mit den Coordinaten $x=0$, $y=0$, $z=\frac{r}{\cos 2\varphi}$ ist der Pol zur Ebene $P_2P_3P_4P_5P_6$. Ebenso ist jede Ecke des Dodekaeders Pol zu einer Ikosaederebene, was uns ein Mittel an die Hand giebt, die Coordinaten der Dodekaederecken aufzustellen.

Es ist also beim Dodekaeder das Verhältniss der Flächen und Ecken ein umgekehrtes, wie beim Ikosaeder, indem hier 20 Ecken in derselben Gruppirung auftreten, wie beim Ikosaeder die Flächen und gleichfalls die 12 Ecken desselben hier 12 Flächen entsprechen. Wollen wir demnach die Coordinaten der Eckpunkte auf gewöhnliche Weise ableiten, so finden wir diese stets durch den Durchschnitt dreier Ebenen bestimmt, welche nach den Unbekannten aufgelöst, die verlangten Coordinaten geben. Die Coordinaten von E_1 entstehen beispielsweise aus dem Durchschnitt der Ebenen I., II. und III. Wir erhalten sie durch Auflösung der Gleichungen

$$\begin{aligned}
&z - r = 0\\
&y\sin 2\varphi + z\cos 2\varphi - r = 0\\
&x\cos\varphi + y\sin\varphi^2 + z\cos 2\varphi - r = 0
\end{aligned}$$

nämlich

$$x = \frac{r \operatorname{tang} \varphi^2}{\cos \varphi}, \qquad y = r \operatorname{tang} \varphi$$

$$z = r$$

u. s. w.

Anstatt also durch Auflösung je dreier Gleichungen die Coordinaten zu berechnen, können wir dieselben aus den Gleichungen der Polarebenen finden.

Beobachten wir hier dieselbe Gruppirung wie beim Ikosaeder und bringen wir alle Gleichungen der Ikosaederflächen $P_1 P_2 P_3$, $P_1 P_3 P_4$, ... auf die Form

$$ax + by + cz - r^2 = 0$$

so sind hier die Coefficienten der Variablen die Coordinaten des betreffenden Eckpunktes. Stellen wir daraus diese Coordinaten zusammen, so erhalten wir, wie eben, für

$E_1(P_1 P_2 P_3)$: dann $E_2(P_1 P_3 P_4)$:

$$x = \frac{r \operatorname{tang} \varphi^2}{\cos \varphi} \qquad x = \frac{r \operatorname{tang} \varphi}{\cos \varphi}$$

$$y = r \operatorname{tang} \varphi \qquad y = -r \operatorname{tang} \varphi^3$$

$$z = r \qquad z = r$$

$E_3(P_1 P_4 P_5)$: $E_4(P_1 P_5 P_6)$:

$$x = 0 \qquad x = -\frac{r \operatorname{tang} \varphi}{\cos \varphi}$$

$$y = -\frac{r}{2} \operatorname{tang} \varphi^2 \qquad y = -r \operatorname{tang} \varphi^3$$

$$z = r \qquad z = r$$

$E_5(P_1 P_6 P_2)$:

$$x = -\frac{r \operatorname{tang} \varphi^2}{\cos \varphi}$$

$$y = r \operatorname{tang} \varphi$$

$$z = r$$

Die zweite Gruppe hat von der XY Ebene den Abstand

$$z = r \operatorname{tang} \varphi^3$$

Es resultirt für

$E_6(P_2P_3P_7)$:

$$x = \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi}$$
$$y = r$$
$$z = r\,\mathrm{tang}\,\varphi^3$$

$E_7(P_3P_4P_8)$:

$$x = \frac{r}{\cos\varphi}$$
$$y = -r\,\mathrm{tang}\,\varphi^2$$
$$z = r\,\mathrm{tang}\,\varphi^3$$

$E_8(P_4P_5P_9)$:

$$x = 0$$
$$y = -\frac{r}{2}\,\mathrm{tang}\,\varphi$$
$$z = r\,\mathrm{tang}\,\varphi^3$$

$E_9(P_3P_6P_{10})$:

$$x = -\frac{x}{\cos\varphi}$$
$$y = -r\,\mathrm{tang}\,\varphi^2$$
$$z = r\,\mathrm{tang}\,\varphi^3$$

$E_{10}(P_6P_2P_{11})$:

$$x = -\frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi}$$
$$y = r$$
$$z = r\,\mathrm{tang}\,\varphi^3$$

Die übrigen 10 Coordinaten ergeben sich, wie die Gleichungen, ebenfalls durch Umkehrung der Vorzeichen von x, y und z.

Für den Inhalt des Dodekaeders berechnen wir uns zuerst den Inhalt eines Tetraeders, dessen Ecken der Mittelpunkt des Körpers, 2 benachbarte Ecken nnd der Mittelpunkt der Seitenfläche sind. Die Coordinaten dieser Punkte seien

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi^2}{\cos\varphi} \qquad x_3 = \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi}$$
$$y_1 = 0 \qquad y_2 = r\,\mathrm{tang}\,\varphi \qquad y_3 = -r\,\mathrm{tang}\,\varphi^3$$
$$z_1 = r \qquad z_2 = r \qquad z_3 = r$$

so dass für den Inhalt desselben die Determinante

$$6\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & r \\ \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi^2}{\cos\varphi} & r\,\mathrm{tang}\,\varphi & r \\ \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi} & -r\,\mathrm{tang}\,\varphi^3 & r \end{vmatrix} = \frac{r^3\,\mathrm{tang}\,\varphi^2}{\cos\varphi}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \mathrm{tg}\,\varphi & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{tg}\,\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{r^3\,\mathrm{tang}\,\varphi^2}{\cos\varphi}\{\mathrm{tang}\,\varphi^3 + 1\} = \frac{2r^3\,\mathrm{tang}\,\varphi^3}{\cos\varphi}$$

entsteht. Multipliciren wir das Resultat mit $\frac{5}{6}.12 = 10$, so erhalten wir den Inhalt des Dodekaeders

$$= \frac{20,3 \operatorname{tang} \varphi^2}{\cos \varphi}$$

Wie schon erwähnt, bedeutet r der Radius der dem Dodekaeder eingeschriebenen, resp. der dem Ikosaeder umschriebenen Kugel. Offenbar erhalten wir jedoch den Radius der dem Dodekaeder umschriebenen Kugel aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

wo x, y, z die Coordinaten irgend eines Eckpunktes des Dodekaeders bezeichnen, eine Gleichung, die zu gleicher Zeit zur Prüfung unserer Rechnung dienen kann, da für alle Coordinaten R denselben Wert haben muss. Wir erhalten die Gleichung

$$R^2 = r^2 \left\{ 1 + \operatorname{tang} \varphi^2 + \frac{\operatorname{tang} \varphi^4}{\cos \varphi^2} \right\}$$

hieraus

$$R = \frac{r}{\cos \varphi} \sqrt{1 + \operatorname{tang} \varphi^4}.$$

Wir erhalten den dritten Poinsot'schen Körper (Poinsot III.), wenn wir jedesmal die 5 Ebenen erweitert denken, welche um eine Dodekaederfläche liegen. Er hat 12 Ecken und 12 Flächen. Die 12 Ecken desselben sind die Pole zu den Ebenen des ersten Poinsot'schen Körpers als Polarebene, während hier die Flächen dieselben sind, wie bei dem Dodekaeder. Die Coordinaten dieser Ecken ergeben sich sofort aus den Gleichungen der 12 Ebenen des ersten Poinsot'schen Körpers.

Die Gleichung der Fläche $P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ war

$$\frac{z}{r \cos 2\varphi} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{rz}{\cos 2\varphi} - r^2 = 0$$

Hieraus die Coordinaten

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{r}{\cos 2\varphi}$$

Aus der Gleichung der Fläche $P_1 P_2 P_7 P_8 P_4$

$$\frac{rx}{\sin \varphi} + \frac{ry}{\operatorname{cotg} \varphi} + rz - r^2 = 0$$

resultirt

$$x = \frac{r}{\sin \varphi}, \quad y = \frac{r}{\operatorname{cotg} \varphi}, \quad z = r$$

$P_1 P_3 P_8 P_9 P_5$ liefert die Coordinaten

$$x = \frac{r}{\cos\varphi}, \quad y = -\frac{r}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad z = r$$

$P_1 P_4 P_9 P_{10} P_6$ die Coordinaten

$$x = -\frac{r}{\cos\varphi}, \quad y = -\frac{r}{\operatorname{tang}\varphi}, \quad z = r$$

u. s. w.

Für die Inhaltsentwickelung ist es am zweckmässigsten, von den 5 Punkten eines sternförmigen Fünfecks zwei zu wählen, welche eine Kante desselben begrenzen und diese mit dem Mittelpunkt dieses Fünfecks und dem Mittelpunkt des Körpers zu einem Tetraeder zu vereinigen. Es entsteht alsdann ein Tetraeder, dessen Inhalt mit 5 multiplicirt den Inhalt der Sternpyramide, als den 12ten Teil des Körpers, giebt.

Nehmen wir hier das Fünfeck, dessen Ebene

$$z = r$$

ist, so sind die Coordinaten aus den Ebenen $P_1 P_2 P_7 P_8 P_4$ und $P_1 P_4 P_9 P_{10} P_6$

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0 & x_2 = \dfrac{r}{\sin\varphi} & x_3 = -\dfrac{r}{\cos\varphi} \\ y_1 = 0 & y_2 = \dfrac{r}{\operatorname{cotg}\varphi} & y_3 = -\dfrac{r}{\operatorname{tang}\varphi} \\ z_1 = r & z_2 = r & z_3 = r \end{array}$$

wovon $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Mittelpunktes des sternförmigen Fünfecks bezeichnen. Den Inhalt liefert die Determinante

$$6\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & r \\ \dfrac{r}{\sin\varphi} & \dfrac{r}{\operatorname{cotg}\varphi} & r \\ -\dfrac{r}{\cos\varphi} & -r\operatorname{cotg}\varphi & r \end{vmatrix} = r^3\left(\frac{\cos\varphi^3 - \sin\varphi^3}{\sin\varphi^2\cos\varphi^2}\right)$$

$$\text{d. i.} \quad \Delta = \frac{r^3}{3\cos\varphi}$$

Der Inhalt des Poinsot III. also $= \dfrac{20r^3}{\cos\varphi}$

Wie wir schon bei einem ebenen sternförmigen Fünfeck einen falschen Inhalt finden, wenn die um das Fünfeck herumliegenden

Dreiecke zu demselben addirt werden, so ist auch hier Aehnliches der Fall. Indem wir dort die Dreiecke zum doppelten Fünfeck zu addiren haben, so muss hier der Inhalt sämmtlicher Pyramiden zum 3fachen Dodekaederinhalt addirt werden, wenn der Inhalt des Poinsot III. resultiren soll. Entwickeln wir hier z. B. den Inhalt einer auf den Seitenflächen aufsitzenden fünfseitigen Pyramide, so erhalten wir dafür die Determinante

$$\frac{5}{3}\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & r & 1 \\ 0 & 0 & \frac{r}{\cos 2\varphi} & 1 \\ \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi^2}{\cos\varphi} & r\,\mathrm{tang}\,\varphi & r & 1 \\ \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi} & -r\,\mathrm{tang}\,\varphi^3 & r & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -r\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi^2}{\cos\varphi} & r\,\mathrm{tang}\,\varphi & 1 \\ \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi} & -r\,\mathrm{tang}\,\varphi^3 & 1 \end{vmatrix} + \frac{r}{\cos 2\varphi}\begin{vmatrix} \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi^2}{\cos\varphi} & r\,\mathrm{tg}\,\varphi \\ \frac{r\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi} & -r\,\mathrm{tg}\,\varphi^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2r^3\,\mathrm{tang}\,\varphi^3}{\sin\varphi\cos\varphi^2} - \frac{2r^3\,\mathrm{tang}\,\varphi^3}{\cos\varphi}$$

und somit für den Inhalt sämmtlicher Pyramiden

$$= \frac{20r^3\,\mathrm{tang}\,\varphi^3}{\sin\varphi\cos\varphi^2} - \frac{20r^3\,\mathrm{tang}\,\varphi^3}{\cos\varphi}$$

Für den Inhalt des Dodekaeders hatten wir

$$= \frac{20r^3\,\mathrm{tang}\,\varphi^3}{\cos\varphi}$$

Bilden wir aus dem dreifachen Inhalt des Dodekaeders und diesen Pyramiden eine Gleichung mit Poinsot III., so folgt

$$\cos 2\varphi = \mathrm{tang}\,\varphi^3(1+2\cos 2\varphi)$$

welcher Ausdruck sich nach Einsetzung der Zahlenwerte auch als gleich erweist.

Den letzten und vierten Poinsot'schen Körper, Poinsot IV., erhalten wir endlich dadurch, dass 3 Ebenen zum Durchschnitt gebracht

werden, welche den 3 von einer Ecke des Pentagonal-Dodekaeders ausgehenden Kanten anliegen.

Die Coordinaten erhalten wir wieder aus den Gleichungen der Polarebenen und zwar aus der Gleichung der Ebene $P_1 P_7 P_9$

$$x = \frac{r \operatorname{cotg} \varphi^2}{\sin \varphi}, \quad y = -r \operatorname{cotg} \varphi, \quad z = r$$

und aus $P_1 P_7 P_{10}$ die Coordinaten

$$x = \frac{r \operatorname{cotg} \varphi}{\sin \varphi}, \quad y = r \operatorname{cotg} \varphi^3, \quad z = r$$

u. s. w.

Den Inhalt finden wir aus einem Tetraeder, dessen Eckpunkte der Mittelpunkt des Körpers, der Mittelpunkt der Seitenfläche und zwei an einer Kante liegende Ecken sind. Seinen Inhalt erhalten wir aus der Determinante

$$6\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & r \\ \frac{r \operatorname{cotg} \varphi^2}{\sin \varphi} & -r \operatorname{cotg} \varphi & r \\ \frac{r \operatorname{cotg} \varphi}{\sin \varphi} & r \operatorname{cotg} \varphi^3 & r \end{vmatrix} = \frac{r^3 \operatorname{cotg} \varphi^2}{\sin \varphi} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \operatorname{cotg} \varphi & -1 & 1 \\ 1 & \operatorname{cotg} \varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{r^3 \operatorname{cotg} \varphi^2}{\sin \varphi} \{\operatorname{cotg} \varphi^3 + 1\} = \frac{2 r^3 \operatorname{cotg} \varphi^4}{\sin \varphi}$$

Der Inhalt des Poinsot IV. ist demnach

$$= \frac{20 r^3 \operatorname{cotg} \varphi^4}{\sin \varphi}$$

Vergleichen wir zum Schluss wieder die Inhalte der zuletzt behandelten drei Körper, so ergiebt sich

Dodek.: Poinsot III. = $\operatorname{tang} \varphi^3 : 1$

Dodek.: Poinsot IV. = $\operatorname{tang} \varphi^8 : 1$

Poinsot III.: Poinsot IV. = $\operatorname{tang} \varphi^5 : 1$

Fig. 1.

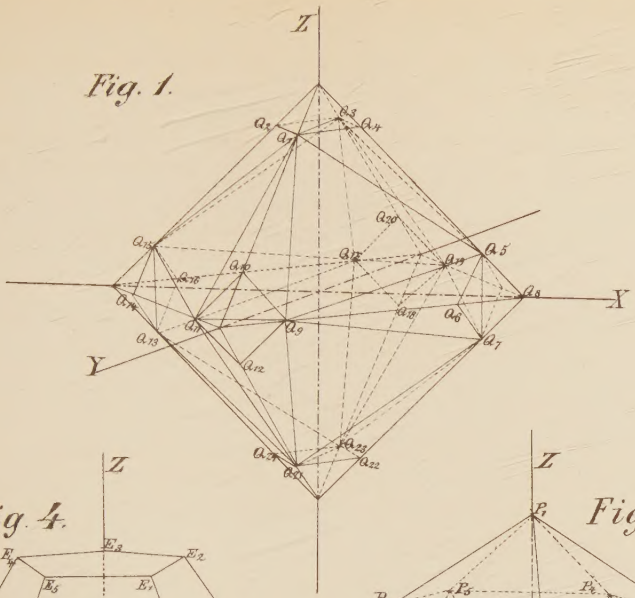


Fig. 4.

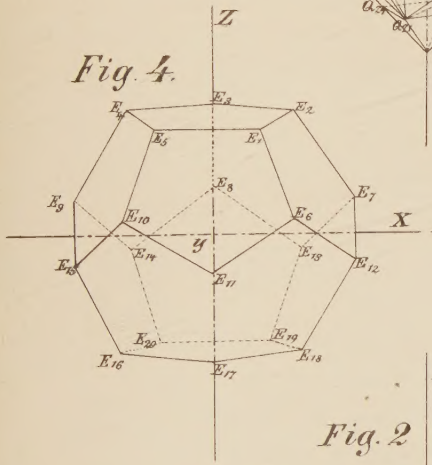


Fig. 3.

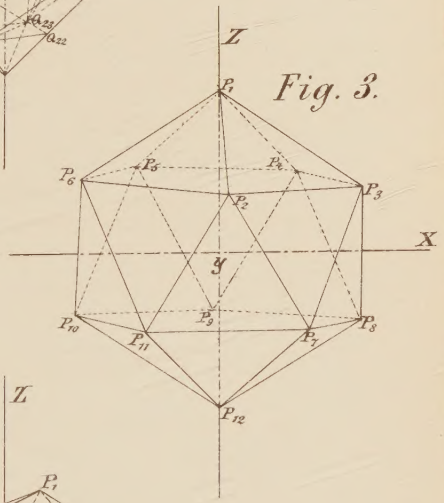
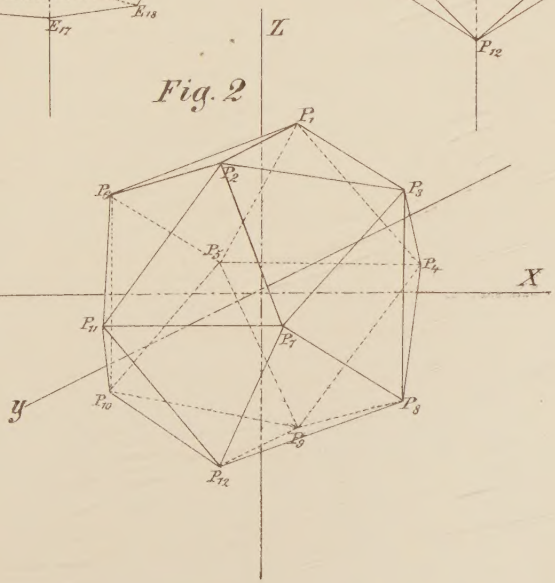


Fig. 2



Steindruckerei von F. W. Kunike in Greifswald.